<u>Άσκηση</u> $c: I \to S$ καν. επιφ με απεικόνιση Gauss $N: S \to S^2$ θεωρώ την ευθειογενή επιφάνεια $\tilde{S}$ που παράγεται από ευθείες και διέρχεται από το $c(t)$ και είναι $\parallel Nc(t)$ Νδο η $\tilde{S}$ είναι αναπτυκτή και η c είναι γραμμή καμπυλότητας της S

<u>Λύση</u> Μια παραμετρική παράσταση της $\tilde{S}$ είναι η $X(t,u) = c(t) + uN(c(t))$ (*)

Μια ευθειογενής επιφάνεια παραμετρείται ως $X(u,v) = c(u) + v\,w(u)$

$\{c'(u), w(u)\}$ ΓΑ $|w(u)| = 1$

ΠΡΟΤΑΣΗ Η $x(u,v) = c(u) + v\,w(u)$ είναι αναπτυκτή $[c', w, w'] = 0$

Λόγω της (*) η $\tilde{S}$ αναπτυκτή $\Leftrightarrow [c'(t), N(c(t)), (N\circ c)'(t)] = 0$

$(N\circ c)'(t)$ ανήκει στο επίπεδο που παράγει τα $c'(t)$ $N(c(t))$ δηλ:

$(N\circ c)'(t) = \lambda(t)c'(t) + \mu(t)N(c(t))$ για κάποιες συναρτήσεις $\lambda(t)$ $\mu(t)$

$$\langle (N\circ c)'(t), N(c(t))\rangle = \lambda(t)\cancel{\langle c'(t), N(c(t))\rangle}^{\,0}$$

$$+ \mu(t)\langle N(c(t)), N(c(t))\rangle$$

$$\left(\frac{1}{2}\underbrace{\langle (N\circ c)(t), (N\circ c)(t)\rangle}\right)' = \mu(t)$$

$$\Rightarrow \mu(t) = 0$$

$(N\circ c)'(t) = \lambda(t)c'(t)$ $1/2$

$\overset{OR}{\Longrightarrow}$ c γρ καμπ

Εστω S κανονική και επίπεδο Π. Αν το Π έχει 1 μόνο κοινό σημείο με την S τότε το Π είναι το εφαπτ επίπεδο της S στο P

Λύση

Εστω w μον κάθετο στο Π Γνωρίζω ότι $\langle P_0P, w\rangle \geq 0$ και $\langle P_0P, w\rangle = 0 \iff P = P_0$

Εστω $f : S \to R$ $f(P) = \langle P_0P, w\rangle = \langle P - P_0, w\rangle$ Η f παρουσ. ολικό ακρότατο στο P_0

Θεωρώ $X : U \to S$ τ.ώ $P_0 = X(u_0, v_0)$ $h = f \circ X$ Τότε η $h : U \to R$ έχει ολ ακρ στο (u_0, v_0)

$h_u = h_v = 0$

$$h(u,v) = \langle X(u,v) - X(u_0,v_0), w\rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} h_u = \langle X_u, w\rangle \\ h_v = \langle X_v, w\rangle \end{array}\right| = 0 \quad \left.\begin{array}{l} w \perp X_u \\ w \perp X_v \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} w \perp T_PS \\ T_PS = \Pi \end{array}$$

(5) (Δες εδώ το φωτογραφείο του εξεταστικού ...

Θεωρούμε τις παραμετρικές επιφάνειες αλ-μερ...

$x(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \log r)$ $r>0$

$\bar{x}(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, 0)$ ← ελικοειδής

Είναι τοπικά ισομετρικές

Λύση

ΘΠ 1ης για την X

$E(r,\varphi) = 1 + \frac{1}{r^2}$ $\quad F(r,\varphi) = 0 \quad G(r,\varphi) = r^2$

ΘΠ 2ης για την X

$e(r,\varphi) = -\frac{1}{r\sqrt{1+r^2}}$, $f(r,\varphi) = 0$ $\quad g(r,\varphi) = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$

ΘΠ 1ης για την $\tilde{X}$

$\bar{E}(u,\theta) = 1$ $\quad \bar{F}(u,\theta) = 0$, $\bar{G}(u,\theta) = u^2 + 1$

ΘΠ 2ης για την $\tilde{X}$

$\bar{e}(u,\theta) = 0$ $\quad \bar{f}(u,\theta) = -\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ $\quad \bar{g}(u,\theta) = \dots$

Η καμπυλότητα Gauss της X

$K(r,\varphi) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(r,\varphi) \Leftrightarrow \boxed{K(r,\varphi) = -\frac{1}{(1+r^2)^2}}$

KG της $\tilde{X}$

$\bar{K}(u,\theta) = \frac{\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \Leftrightarrow \boxed{\bar{K}(u,\theta) = -\frac{1}{(1+u^2)^2}}$

Έστω ότι είναι ισομετρικές οι επιφάνειες

δηλαδή υπάρχει απεικόνιση $(u,\theta) = (u(r,\varphi), \theta(r,\varphi))$

Η φ είναι διαφορομορφισμός

Ειδικά $\frac{\partial(u,\theta)}{\partial(r,\varphi)} \neq 0$

Σύμφωνα με το έξοχο Θεώρημα θα είναι

$$-\frac{1}{(1+r^2)^2} = -\frac{1}{(u^2+1)^2} \overset{?}{\Longrightarrow} \boxed{u(r,\varphi)=r}$$

$$\theta = \theta(r,\varphi)$$

Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων

$$y(r,\varphi) = \bar{x}(u(r,\varphi), \theta(r,\varphi)) = \bar{X}(r, \theta(r,\varphi))$$

[illegible]

Θεμελ. Ποσότ. της (J) ως προς του Y (άλλο σύστ. συντ.)

$$y(r,\varphi) = \bar{x}(r, \theta(r,\varphi))$$

?

$$Y_r = \bar{X}_u + \theta_r \bar{X}_\theta$$

$$Y_\varphi = \theta_r \bar{x}_\theta$$

$$E^y(r,\varphi) = \|Y_r\|^2 = \|\bar{X}_u + \theta_r \bar{X}_\theta\|^2 = 1 + (\theta_r)^2 (r^2+1)$$

$$F^y(r,\varphi) = \theta_r \theta_\varphi (r^2+1)$$

$$G^y(r,\varphi) = (\theta_\varphi)^2 (r^2+1)$$

$$E^y(r,\varphi) = 1 + (\theta_r)^2 (r^2+1) = 1 + \frac{1}{r^2} = E(r,\varphi)$$

$$F^y(r,\varphi) = \theta_r \theta_\varphi (r^2+1) = 0 = F(r,\varphi) \Leftarrow \theta_r = 0 \checkmark \text{ ή } \theta_\varphi = 0$$

άτοπο

$$G^y(r,\varphi) = (\theta_\varphi)^2 (r^2+1) = r^2 = G(r,\varphi)$$

$$\theta = \theta(\varphi)$$

Άρα δεν είναι τοπικά ισοι

Άσκηση Δίνεται η επιφάνεια με σύστημα συντ. $X(u, v, e^u + e^v)$ και η επιφανειακή της καμπύλη $c(t) = x(t, t) = (t, t, 2e^t)$

Να υπολογιστεί η $k_n(w) = k_n(c'(1))$

Λύση

$$w = a x_u + b x_v$$

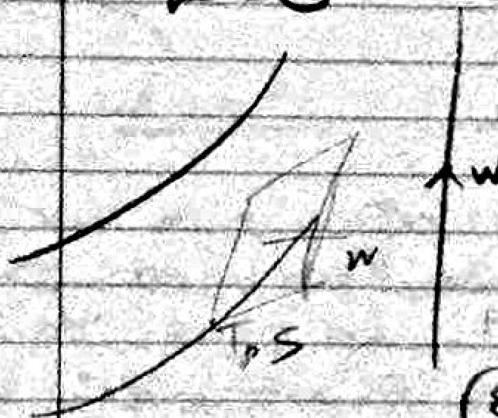
$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)} = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

$$c(t) = x(t, t) \Rightarrow c'(t) = \frac{dt}{dt} x_u(u, t) + \frac{dt}{dt} x_v(u, t)$$

$$= x_u(t, t) + x_v(t, t)$$

$$W = c'(0) = 1\, x_u(0,0) + 1 \cdot x_v(0,0) \qquad a = b = 1$$

Άσκηση Αν όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα της επιφ. S είναι παράλληλα προς ευθεία (ε) νδο η S έχει καμπυλότητα Gauss $K = 0$



Λύση

$\langle N, W \rangle = 0$ όπου $N : S \to S^2$ η απεικόνιση Gauss

η $h : S \to \mathbb{R}$ $h(p) = \langle N(p), w \rangle$ είναι σταθερή $\Leftrightarrow dh_p = 0\ \forall p \in S$

$$dh_p : T_pS \to \mathbb{R}$$

$u \in T_pS \quad c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$

$c(0) = p \quad c'(0) = w$

$$d(h_p(u)) = (h \circ c)'(t)$$

$$h \circ c(t) = h(c(t)) \langle N(c(t)), w \rangle$$

$$(h \circ c)'(0) = \langle \underbrace{(N \circ c)'(0)}, w \rangle + 0$$

$$= \langle dN_p(u), w \rangle = \langle L_p u, w \rangle$$

$dh_p(u) = -\langle L_p u, w\rangle$, $u \in T_pS$

Δεν πρέπει $\langle L_p u, w\rangle = 0$ $\forall p$ $\forall v \in T_pS$

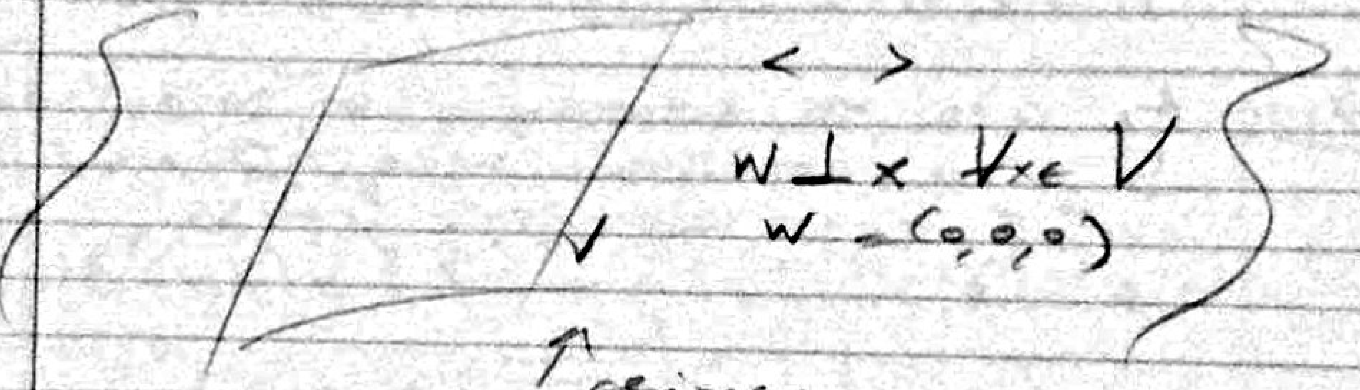
$K_p := \left(\quad\right)^{-1}\left(\quad\right)$

w [illegible]
L_p [illegible]

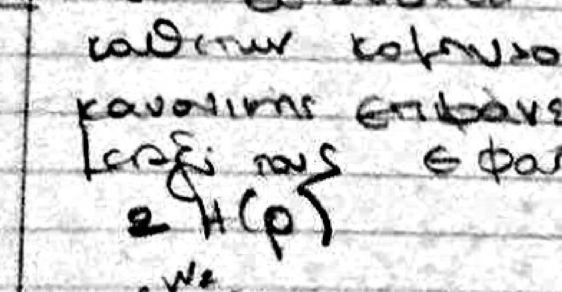
$\langle L_p w, u\rangle = 0$ $\forall u \in T_pS$ $w \in T_pS$ $\longrightarrow$

$L_p w = 0 \xRightarrow{w \neq 0} \ker L_p \neq \{0\}$

$\Rightarrow \det L_p = 0 \Rightarrow K(p) = 0$



Άσκηση Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των καθέτων καμπυλοτήτων σε σημείο p κανονικής επιφάνειας S ως προς κάθετες μεταξύ τους εφαπτομενικές διευθύνσεις είναι $2H(p)$



Λύση

Υποθέτω ότι $w_1, w_2 \in T_pS$
$\langle w_1, w_2\rangle = 0$ και
$\|w_1\| = \|w_2\| = 1$

$k_n(w_1) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta$
$w_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$

$k_n(w_2) = k_1(p)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ $\quad w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)e_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)e_2$

$+ k_2(p)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$k_n(w_2) = k_1(p)\sin^2\theta + k_2(p)\cos^2\theta$

$k_n(w_1) + k_n(w_2) = k_1(p) + k_2(p) = 2H(p)$

Έστω $X: V \to S$ τοπική είναι κανον. επιφ. με παραμ. (u,v)

Δείξτε ότι

i) $N_u \times N_v = K\, X_u \times X_v \quad N: S \to S^2$

$K =$ καμπυλ. Gauss

ii) $N_u \times X_v + X_u \times N_v = 2H\, X_u \times X_v$

$N_u = (N \circ X)_u, \quad L X_u = -N_u$

$L X_v = -N_v$

<u>Λύση</u> $\quad L X_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v$

$L X_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v$

i) $N_u \times N_v = (L X_u) \times (L X_v)$

$= (a_{11} X_u + a_{21} X_v) \times (a_{12} X_u + a_{22} X_v)$

$= a_{11} a_{12} \cancel{X_u \times X_u}^{0} + a_{11} a_{21}\, X_u \times X_v$

$+ a_{21} a_{12} X_v \times X_u + a_{21} a_{22} \cancel{X_v \times X_v}^{0}$

$= a_{11} a_{21} X_u \times X_v - a_{21} a_{12} X_u \times X_v$

$= (a_{11} a_{21} - a_{21} a_{12}) X_u \times X_v$

$= \det(\quad) X_u \times X_v = \det L\, X_u \times X_v = K X_u \times X_v$

Στο $\mathbb{R}^2$ διανύσματα $\langle W,W\rangle=1$, $W\times W=0$?

ii) $N_u \times X_v + X_u \times N_v =$

$-LX_u \times X_v - X_u \times (LX_u)$

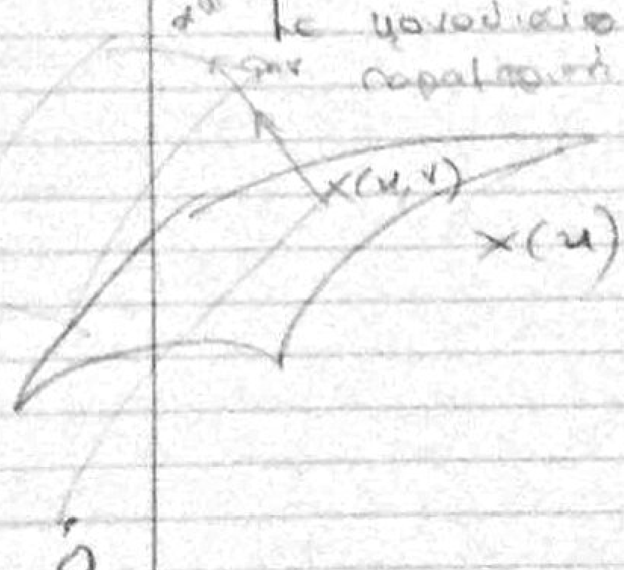
$= -(\alpha_{11}X_u + \alpha_{21}X_v)\times X_v - X_u \times (\alpha_{12}X_u + \alpha_{22}X_v)$

$= -\alpha_{11}X_u \times X_v - \alpha_{22}X_u \times X_v$

$= (-\alpha_{11} - \alpha_{22})X_u \times X_v = -\mathrm{trace}(\;)X_u \times X_v$

$= -(\mathrm{trace})X_u \times X_v = -2HX_u \times X_v$

Δίνεται κανονική παραμ. επιφάνεια $X: U\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με μοναδιαίο κάθετο N και $\alpha\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε την παράλληλη επιφάνεια $\bar{X} = X + \alpha N$, $\alpha\neq 0$



$\bar{X}(u,v) = X(u,v) + \alpha N(u,v)$

i) Η $\bar{X}$ είναι κανονική $\iff \frac{1}{\alpha}$ δεν είναι κύρια καμπυλότητα του X

ii) Αν $\bar{X}$ κανονική δείξτε ότι η K Gauss και μέση είναι

$$\bar{K} = \frac{K}{1-2H\alpha+K\alpha^2}, \quad \bar{H} = \frac{H-K\alpha}{1-2H\alpha+K\alpha^2}$$

$\bar{X}_u = X_u + \alpha N_u \qquad \bar{X}_v = X_v + \alpha N_v$

$\bar{X}_u \times \bar{X}_v = (X_u + \alpha N_u)\times(X_v + \alpha N_v)$

$= X_u \times X_v + \alpha X_u \times N_v + \alpha N_u \times X_v + \alpha^2 N_u \times N_v = X_u \times X_v - 2\alpha H X_u \times X_v + \alpha^2 K X_u \times X_v$

$\bar{X}_u \times \bar{X}_v = (1 - 2H\alpha + K\alpha^2)X_u \times X_v$

Η $\bar{X}$ δεν είναι καν. Εχει όπου

$$1-2H\alpha+K\alpha^2=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-2H\frac{1}{\alpha}+K=0$$

$$t^2-2Ht+K=0$$

$\frac{1}{\alpha}$ ρίζα του $t^2-2Ht+K \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\alpha}=K_1$ ή $\frac{1}{\alpha}=K_2$

ii) Το μοναδιαίο κάθετο N της $\bar{x}$ είναι $\bar{N}=\frac{\bar{x}_u\times\bar{x}_v}{\|\bar{x}_u\times\bar{x}_v\|}$

$$=\frac{(1-2H\alpha+K\alpha^2)x_u\times x_v}{|1-2H\alpha+K\alpha^2|\,\|x_u\times x_v\|}=\pm N$$

$$\bar{N}_u\times\bar{N}_v=\bar{K}\,\bar{x}_u\times\bar{x}_v \Leftrightarrow N_u\times N_v=\bar{K}$$

$$=\bar{K}(1-2H\alpha+K\alpha^2)x_u\times x_v \Leftrightarrow$$

$$K x_u\times x_v=\bar{K}(1-2H\alpha+K\alpha^2)x_u\times x_v$$

$$\Rightarrow K=\bar{K}(1-2H\alpha+K\alpha^2) \Leftrightarrow$$

$$\bar{K}=\frac{K}{1-2H\alpha+K\alpha^2}$$

$(\bar{N}=N)$

$N_u \times (x_v + \alpha N_v) + (x_u + \alpha N_u) \times N_v =$

$= -2H(1 - 2H\alpha + K\alpha^2) x_u \times x_v$

$N_u \times x_v + \alpha N_u \times N_v + x_u \times N_v + \alpha N_u \times N_v =$

$= -2H(1 - 2H\alpha + K\alpha^2) x_u \times x_v \Rightarrow$

$-2H x_u \times x_v + 2\alpha K x_u \times x_v =$

$= -2H(1 - 2H\alpha + K\alpha^2) x_u \times x_v$

Έστω ότι η X είναι σταθερή μέση καμπυλότητα

$H = c \neq 0 \qquad \alpha = \frac{1}{2c}$

$\bar{K} = \dfrac{K}{1 - 2c \cdot \frac{1}{2c} + K\left(\frac{1}{2c}\right)^2} = (2c)^2$

Αντίστροφα

Έστω $K = c \qquad \alpha^2 = \frac{1}{c}$

$\bar{H} = \dfrac{H - c \cdot \frac{1}{\sqrt{c}}}{\quad} = \dots$